Exámenes de Selectividad

Física. Comunidad Valenciana 2023, Extraordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Deduce la expresión del periodo de un satélite que sigue una órbita circular alrededor de un planeta, en función de la masa de este y del radio de la órbita. Alrededor del planeta, de masa M, orbitan dos satélites de igual masa m y radios orbitales r_1 y r_2, siendo $r_2 > r_1$. Discute cuál de los dos satélites orbitará con mayor periodo. Razona también cuál de los dos satélites tendrá menor energía potencial gravitatoria.

Solución:

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Simplificando m y multiplicando ambos lados por r:

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v se relaciona con el periodo T por:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2.$$

Despejando T:

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}.$$

Entonces, el periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}},$$

que es la *Tercera Ley de Kepler* para órbitas circulares. Vemos que como $T \propto r^{3/2}$, entonces al aumentar el radio orbital, el periodo aumenta. Dado que $r_2 > r_1$, se cumple que:

$$T_2 > T_1.$$

Así, el satélite que orbita a mayor distancia (r_2) tiene un periodo mayor. La energía potencial gravitatoria de un satélite es:

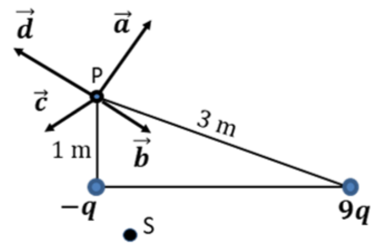
$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Como E_p es inversamente proporcional a r, al aumentar r, la energía potencial gravitatoria es mayor (menos negativa). Por lo tanto, el satélite con menor r (r_1) tiene una energía potencial más negativa, es decir, menor energía potencial gravitatoria.

Por lo tanto, el periodo de un satélite en órbita circular es $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$. Además, el satélite con mayor radio orbital (r_2) tiene un periodo mayor, mientras que el satélite con menor radio orbital (r_1) tiene menor energía potencial gravitatoria.

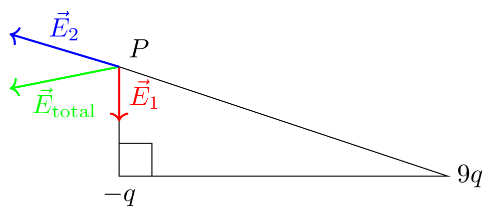
Cuestión 2. Campo Electromagnético

El diagrama muestra dos cargas de magnitudes $-q$ y $9q$ con $q > 0$. Razona cuál de los vectores dibujados representa el vector campo eléctrico total en el punto P. Si los puntos P y S pertenecen a la misma superficie equipotencial, ¿cuál es el trabajo realizado al llevar una carga Q desde el punto P hasta el punto S?



Solución:

Primero, dibujemos el triángulo y las posiciones de las cargas, así como los vectores de campo eléctrico en P para decidir cuál de los vectores se corresponde con el vector campo eléctrico total:



Observamos que el campo total $\vec{E}_{\text{total}}$ coincide con el vector $\vec{c}$ de la imagen propuesta:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{c}.$$

Si los puntos P y S están en la misma superficie equipotencial, entonces $V_P = V_S$, por lo que

$$W_{P\to S} = -\Delta E_p = -Q \cdot \Delta V = -Q(V_S - V_P) = 0 \text{ J}.$$

Por lo tanto, el vector campo eléctrico total en P es $\vec{c}$ y el trabajo realizado al mover una carga Q desde P hasta S es cero, ya que ambos puntos están en la misma superficie equipotencial.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Un protón se mueve con velocidad $\vec{v}$ y describe una trayectoria circular en un ciclotrón en el que hay un campo magnético constante $\vec{B}$, perpendicular a $\vec{v}$. Escribe la expresión de la fuerza que actúa sobre el protón y representa los vectores velocidad, campo magnético y fuerza. Razona por qué la trayectoria es circular. ¿Cómo cambiaría la trayectoria si se tratara de un neutrón?

Solución:

La fuerza que actúa sobre el protón es la *fuerza de Lorentz*:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}),$$

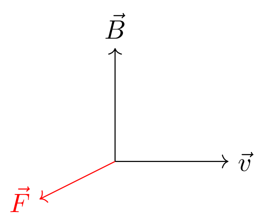
donde:

- q es la carga del protón ($q = +e$),
- $\vec{v}$ es la velocidad del protón,
- $\vec{B}$ es el campo magnético.

Como $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares (y $\sin 90° = 1$), el módulo de la fuerza es:

$$F = qvB.$$

Esta fuerza es siempre perpendicular a la velocidad, actuando como una fuerza centrípeta, lo que causa que el protón describa una trayectoria circular:



La fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad, cambiando la dirección de ésta pero no su magnitud. Esto resulta en un movimiento circular uniforme. Por el contrario, si se tratara de un *neutrón*, que es eléctricamente neutro ($q = 0$), la fuerza magnética sería nula:

$$\vec{F} = 0.$$

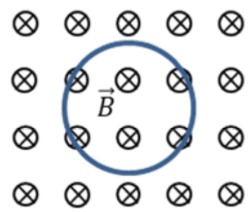
Así, el neutrón no experimentaría ninguna fuerza magnética y seguiría una trayectoria rectilínea a velocidad constante.

Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre el protón es $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, causando una trayectoria circular debido a que la fuerza es perpendicular a la velocidad. Por el contrario, un neutrón no experimentaría esta fuerza y su trayectoria sería rectilínea.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

En la figura se muestra una espira circular en el seno de un campo magnético dirigido hacia dentro del plano del papel. Razona si se genera corriente inducida en la espira y en qué sentido, en los siguientes casos:

a) **El módulo del campo magnético disminuye y la espira permanece fija.**
b) **El radio de la espira aumenta progresivamente y el módulo del campo magnético permanece constante.**



Solución:

a) **El módulo del campo magnético disminuye y la espira permanece fija.**

Cuando el módulo del campo magnético (B) disminuye y la espira permanece fija, el *flujo magnético* a través de la espira disminuye. Según la *Ley de Faraday*, una variación en el flujo magnético induce una fuerza electromotriz (fem):

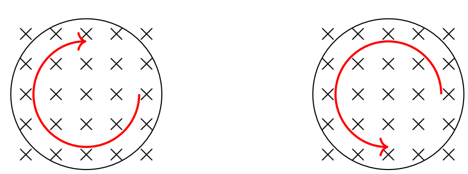
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

El signo negativo indica, según la *Ley de Lenz*, que la corriente inducida se opone a la disminución del flujo. Por lo tanto, la corriente inducida generará un campo magnético que apunta *hacia dentro* del plano, intentando mantener el flujo inicial. Aplicando la *regla de la mano derecha*, el sentido de la corriente inducida será *horario.*

Por lo tanto, se genera una corriente inducida en sentido horario, para oponerse a la disminución del flujo magnético.

b) **El radio de la espira aumenta progresivamente y el módulo del campo magnético permanece constante.**

Cuando el radio de la espira aumenta y el campo magnético B permanece constante, el área A de la espira aumenta, lo que provoca un aumento en el flujo magnético ($\Phi_B = BA$). En ese caso, la corriente inducida se opondrá al aumento del flujo. Así, la corriente inducida generará un campo magnético que apunta *hacia fuera* del plano. Aplicando la regla de la mano derecha, el sentido de la corriente inducida será *antihorario.*



Caso a) Sentido horario Caso b) Sentido antihorario

Por lo tanto, se genera una corriente inducida en sentido antihorario, para oponerse al aumento del flujo magnético.

Cuestión 5. Ondas

Determina el periodo, la longitud de onda, el número de ondas y la velocidad de propagación de una onda sísmica transversal cuya función es $y(x,t) = 2\sin(50\pi t - \frac{\pi}{2}x)$ (todos los valores se expresan en unidades del Sistema Internacional). Si $y(0,t) = 2$ m, determina razonadamente el valor de $y(8,t)$ y el valor de $y(0, t + 0,04)$.

Solución:

La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx),$$

donde:

- Amplitud: $A = 2$ m,
- Frecuencia angular: $\omega = 50\pi$ rad/s,
- Número de onda: $k = \dfrac{\pi}{2}$ rad/m.

El periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} \text{ s} = 0,04 \text{ s}.$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi} = 4 \text{ m}.$$

La velocidad de propagación es:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{50\pi}{\frac{\pi}{2}} = 50\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 100 \text{ m/s}.$$

Vamos a calcular $y(8,t)$ dado que $y(0,t) = 2$ m. En $x = 0$:

$$y(0,t) = 2\sin(50\pi t).$$

Dado que $y(0,t) = 2$ m, entonces:

$$2\sin(50\pi t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin(50\pi t) = 1.$$

Esto ocurre cuando:

$$50\pi t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{100} + \frac{n}{25},$$

para cualquier entero n. Ahora, calculamos $y(8,t)$:

$$y(8,t) = 2\sin(50\pi t - \frac{\pi}{2} \cdot 8) = 2\sin(50\pi t - 4\pi) = 2\sin(50\pi t - 4\pi),$$

pero $\sin(\theta - 4\pi) = \sin(\theta)$, ya que el seno es una función periódica con periodo 2π. Entonces,

$$y(8,t) = 2\sin(50\pi t) \quad \Rightarrow \quad y(8,t) = y(0,t) = 2 \text{ m}.$$

Calculamos ahora $y(0, t + 0,04)$. Recordando que el periodo $T = 0,04$ s, entonces:

$$y(0, t + 0,04) = 2\sin(50\pi(t + 0,04)) = 2\sin(50\pi t + 50\pi \cdot 0,04) = 2\sin(50\pi t + 2\pi).$$

Como $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$, entonces

$$y(0, t + 0,04) = 2\sin(50\pi t) = y(0, t = 2 \text{ m}.$$

Por lo tanto, el periodo es $0,04$ s, la longitud de onda es 4 m, el número de onda es $k = \dfrac{\pi}{2}$ rad/m y la velocidad de propagación es 100 m/s. Los valores de $y(8,t)$ y $y(0, t + 0,04)$ son ambos 2 m.

Cuestión 6. Ondas

Escribe la expresión del nivel sonoro (en dB) en función de la intensidad de un sonido. Demuestra que una persona expuesta a un nivel sonoro de 70 dB recibe una intensidad 100 veces menor que aquella que está expuesta a un nivel sonoro de 90 dB.

Solución:

El *nivel sonoro* β en decibelios (dB) se define como:

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde I es la intensidad del sonido e I_0 es la intensidad de referencia ($I_0 = 1\times 10^{-12}$ W/m^2). Sea $\beta_1 = 70$ dB e $\beta_2 = 90$ dB. Calculamos las intensidades correspondientes I_1 e I_2:

$$70 = 10\log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \quad\Rightarrow\quad \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 7 \quad\Rightarrow\quad \frac{I_1}{I_0} = 10^7 \quad\Rightarrow\quad I_1 = 10^7 I_0,$$

$$90 = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \quad\Rightarrow\quad \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_0}\right) = 9 \quad\Rightarrow\quad \frac{I_2}{I_0} = 10^9 \quad\Rightarrow\quad I_2 = 10^9 I_0.$$

Calculamos la relación entre las intensidades:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^9 I_0}{10^7 I_0} = \frac{10^9}{10^7} = 10^2 = 100$$

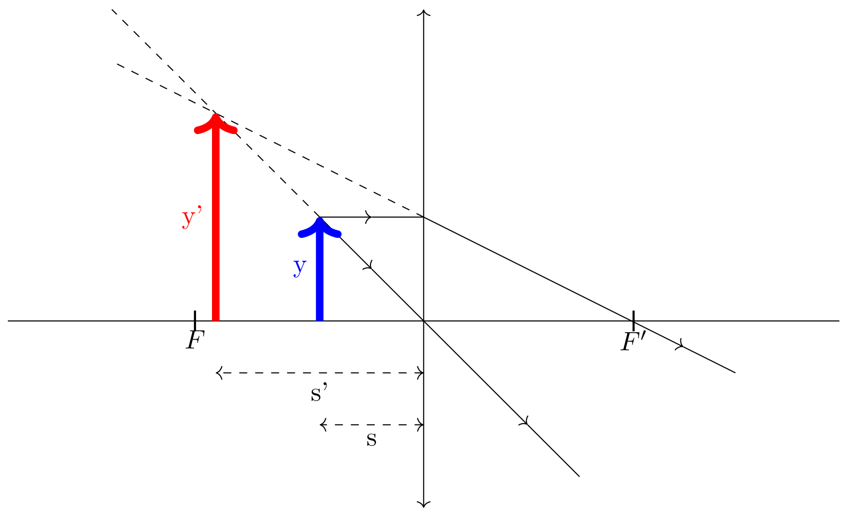
Por lo tanto, la expresión del nivel sonoro es $\boldsymbol{\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)}$ y una persona expuesta a un nivel sonoro de 70 dB recibe una intensidad 100 veces menor que aquella expuesta a 90 dB.

Cuestión 7. Óptica

Demuestra que una lupa produce imágenes derechas de objetos reales si estos se encuentran entre la lupa y su foco objeto. ¿Estas imágenes son reales o virtuales? ¿Dónde debería situarse un objeto real si se desea obtener una imagen invertida? ¿Qué ocurre si situamos el objeto justo en el foco objeto de la lupa? Para responder usa en cada caso un trazado de rayos.

Solución:

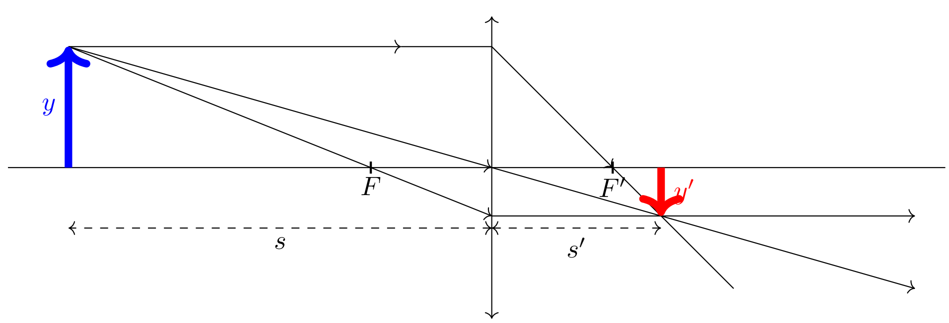
Sabemos que una lupa es una lente convergente ($f' > 0$) en la que se coloca el objeto entre la lente y su foco objeto F para obtener imágenes mayores:



Así, cuando un objeto real se coloca entre la lente convergente (lupa) y su foco objeto (f), la imagen formada es:

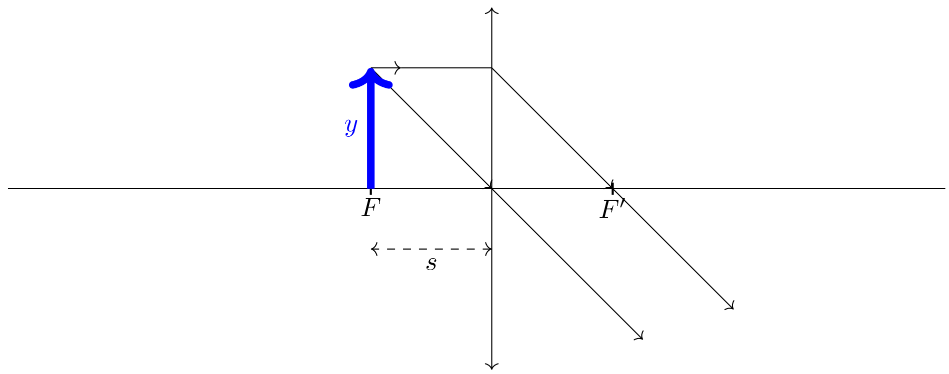
- *Virtual*: no puede proyectarse en una pantalla.
- *Derecha*: mantiene el mismo sentido que el objeto.
- *Aumentada*: de mayor tamaño que el objeto.

Para obtener una imagen *real* e *invertida*, el objeto debe situarse a una distancia mayor que la distancia focal ($s > f$):



Así, cuando el objeto está más allá del foco objeto, la lente forma una imagen real, invertida y del otro lado de la lente.

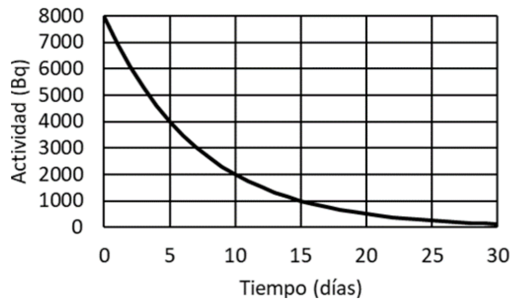
Si el objeto se sitúa justo en el foco objeto ($s = f$), los rayos emergentes son paralelos y la imagen se forma en el infinito:



Por lo tanto, una lupa produce imágenes virtuales, derechas y aumentadas de objetos reales situados entre la lente y su foco objeto. Para obtener una imagen invertida, el objeto debe estar más allá del foco objeto. Si el objeto se sitúa en el foco, la imagen se forma en el infinito y no se observa.

Cuestión 8. Física Moderna

La gráfica representa la actividad de una muestra radiactiva en función del tiempo (en días). Utilizando los datos de la gráfica, deduce razonadamente el periodo de semidesintegración de la muestra y la constante de desintegración. Determina el número de periodos necesarios para que la actividad pase a valer 1000 Bq.



Solución:

Observando la gráfica, podemos notar que la actividad se reduce a la mitad cada 5 días. Esto significa que el *periodo de semidesintegración* ($T_{1/2}$) de la muestra es:

$$T_{1/2} = 5 \text{ días}.$$

La *constante de desintegración* (λ) se relaciona con el periodo de semidesintegración mediante:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5 \text{ días}} = \frac{0,6931}{5 \text{ días}} = 0,1386 \text{ días}^{-1}.$$

Para determinar el número de periodos necesarios para que la actividad inicial (A_0) pase a valer $A = 1000$ Bq, usamos la ley de desintegración radiactiva:

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

donde n es el número de periodos de semidesintegración. Si observamos la gráfica, podemos ver que si A_0 es la actividad inicial (por ejemplo, a $t = 0$ días), y considerando que la actividad se reduce a la mitad cada 5 días, entonces:

$$\text{A los 5 días:} \quad A = \frac{A_0}{2}.$$
$$\text{A los 10 días:} \quad A = \frac{A_0}{4}.$$
$$\text{A los 15 días:} \quad A = \frac{A_0}{8}.$$

Si suponemos que $A_0 = 8000$ Bq (valor inicial en la gráfica), entonces a los 15 días:

$$A = \frac{8000 \text{ Bq}}{8} = 1000 \text{ Bq}.$$

Nótese que esto corresponde a $n = 3$ periodos de semidesintegración.

Por lo tanto, el periodo de semidesintegración de la muestra es 5 días, la constante de desintegración es $0,1386$ días^{-1} y se necesitan 3 periodos de semidesintegración para que la actividad pase a valer 1000 Bq.

Problema 1. Campo Gravitatorio

En enero de 2023 el telescopio espacial James Webb descubrió su primer exoplaneta, el LHS 475b. Dicho planeta gira en una órbita circular alrededor de una estrella de masa $M = 5,4 \cdot 10^{29}$ kg. Además, se sabe que tarda 2 días terrestres en describir una órbita.

a) **Calcula la distancia a la que se encuentra el planeta del centro de la estrella. Primero deduce razonadamente la expresión simbólica que relaciona dicha distancia con las otras magnitudes conocidas (M y el periodo orbital).**

b) **En la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es de 9,2 m/s^2 y la velocidad de escape es de 10,8 km/s. Deduce la expresión de dicha velocidad de escape y calcula el valor de la masa y del radio del planeta.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2 kg^{-2}

Solución:

a) **Calcula la distancia a la que se encuentra el planeta del centro de la estrella. Primero deduce razonadamente la expresión simbólica que relaciona dicha distancia con las otras magnitudes conocidas (M y el periodo orbital).**

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al planeta en órbita circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Simplificamos m y uno de los factores r:

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v se relaciona con el periodo T mediante:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sustituimos v en la ecuación anterior:

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2.$$

Simplificamos:

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$GM = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}.$$

Despejamos r:

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}.$$

Entonces, la distancia r es:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Convertimos el periodo T a segundos:

$$T = 2\ \text{días} \cdot 24\ \frac{\text{h}}{\text{día}} \cdot 3600\ \frac{\text{s}}{\text{h}} = 172800\ \text{s}.$$

Sustituimos los valores:

$$r = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 5,4 \cdot 10^{29}\ \text{kg} \cdot (172800\ \text{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 3,01 \cdot 10^9\ \text{m}$$

Por lo tanto, la distancia del planeta al centro de la estrella es $3,01 \cdot 10^9$ m.

b) **En la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es de 9,2 m/s^2 y la velocidad de escape es de 10,8 km/s. Deduce la expresión de dicha velocidad de escape y calcula el valor de la masa y del radio del planeta.**

La *velocidad de escape* v_e se expresa como:

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{R}},$$

donde m es la masa del planeta y R es el radio del planeta. La *aceleración de la gravedad* en la superficie del planeta es:

$$g = \frac{Gm}{R^2}.$$

Despejamos m de la segunda ecuación:

$$m = \frac{gR^2}{G}.$$

Sustituimos m en la expresión de v_e:

$$v_e = \sqrt{\frac{2G\left(\frac{gR^2}{G}\right)}{R}} = \sqrt{2gR}.$$

Despejamos R:

$$v_e^2 = 2gR \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v_e^2}{2g}.$$

Sustituimos los valores (convirtiendo v_e a m/s):

$$v_e = 10,8 \text{ km/s} = 10.800 \text{ m/s}$$

Entonces,

$$R = \frac{(10800 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,2 \text{ m/s}^2} = \frac{116640000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{18,4 \text{ m/s}^2} = 6340869,565 \text{ m} = 6,34 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calculamos la masa m. Usamos la ecuación:

$$m = \frac{gR^2}{G}.$$

Sustituimos los valores:

$$m = \frac{9,2 \text{ m/s}^2 \cdot (6,34 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N·m}^2\text{kg}^{-2}} = 5,543 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por lo tanto, la masa del planeta es $5,54 \cdot 10^{24}$ kg y su radio es $6,34 \cdot 10^6$ m.

Problema 2. Campo Electromagnético

Dos cargas eléctricas de valor $q_A = +2\ \mu$C y $q_B = -2\ \mu$C están situadas en los puntos A$(3, 0)$ m y B$(0, 3)$ m, respectivamente.

a) **Calcula y representa en el punto C(3,3) m los vectores campo eléctrico generados por cada una de las cargas y el campo eléctrico total.**

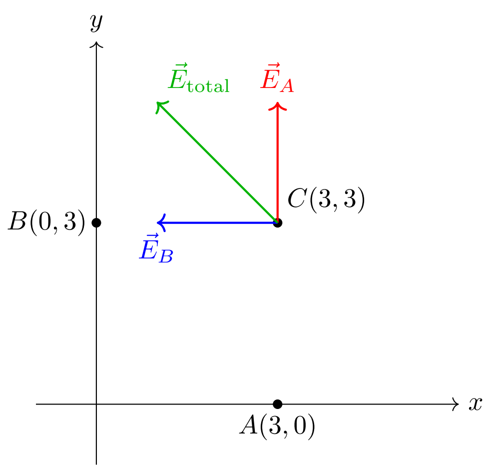
b) **Calcula el potencial eléctrico en el punto D(4, 4) m. Determina el trabajo para trasladar una carga de 10^{-6} C desde el infinito hasta el punto D. (Considera nulo el potencial eléctrico en el infinito).**

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N·m^2 C^{-2}

Solución:

a) **Calcula y representa en el punto C(3,3) m los vectores campo eléctrico generados por cada una de las cargas y el campo eléctrico total.**

Representamos gráficamente la situación:



Cálculo de $\vec{E}_A$:
La distancia entre A y C es:

$$r_{AC} = |y_C - y_A| = |3 - 0| = 3 \text{ m.}$$

El campo eléctrico debido a q_A en C es:

$$E_A = K\frac{|q_A|}{r_{AC}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(3)^2} = 2 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

Dirección: en el eje y positivo, ya que q_A es positiva y C está por encima de A: $\vec{E}_A = 2000\vec{j}$ N/C.
Cálculo de $\vec{E}_B$:
La distancia entre B y C es:

$$r_{BC} = |x_C - x_B| = |3 - 0| = 3 \text{ m.}$$

El campo eléctrico debido a q_B en C es:

$$E_B = K\frac{|q_B|}{r_{BC}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(3)^2} = 2 \cdot 10^3 \text{ N/C.}$$

Dirección: en el eje x negativo, ya que q_B es negativa y C está a la derecha de B: $\vec{E}_B = -2000\vec{i}$ N/C.
Campo eléctrico total en C:

$$E_{\text{total}} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = -2000\vec{i} + 2000\vec{j} \text{ N/C}.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico total en C es $-2000\vec{i} + 2000\vec{j}$ N/C.

b) **Calcula el potencial eléctrico en el punto D(4, 4) m. Determina el trabajo para trasladar una carga de 10^{-6} C desde el infinito hasta el punto D. (Considera nulo el potencial eléctrico en el infinito).**

Cálculo del potencial en D debido a ambas cargas:

$$V = V_A + V_B = K\left(\frac{q_A}{r_{AD}} + \frac{q_B}{r_{BD}}\right)$$

Calculamos las distancias:

$$r_{AD} = \sqrt{(4-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} = 4,123 \text{ m},$$

$$r_{BD} = \sqrt{(4-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4,123 \text{ m}.$$

Entonces,

$$V = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{4,123} + \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{4,123}\right) = 0 \text{ V}.$$

Cálculo del trabajo para trasladar una carga desde el infinito hasta D:

$$W = q\Delta V = q(V_D - V_\infty) = q(0-0) = 0 \text{ J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado es cero, ya que el potencial en D es igual al potencial en el infinito (ambos son cero).

Problema 3. Óptica

Una lente delgada en aire tiene una distancia focal imagen de -10 cm. A 5 cm de la lente se sitúa un objeto de 2 cm de altura.

a) **Calcula la posición y tamaño de la imagen. Razona si la lente es convergente o divergente.**
b) **Obtén razonadamente la posición de un objeto para que la imagen sea derecha y tenga un tamaño que sea la mitad que el del objeto. Justifica mediante un trazado de rayos la formación de la imagen.**

Solución:

a) **Calcula la posición y tamaño de la imagen. Razona si la lente es convergente o divergente.**

Datos:
- Distancia focal: $f' = -10$ cm (negativa, por lo que es una lente divergente).
- Distancia objeto: $s = -5$ cm (negativa porque el objeto está a la izquierda de la lente).
- Altura del objeto: $y = 2$ cm.

Usamos la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{-10} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{-5}$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{-10} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{-10} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{10} - \frac{2}{10} = -\frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad s' = -\frac{10}{3} \text{ cm} = -3,33 \text{ cm}.$$

El signo negativo indica que la imagen se forma en el mismo lado que el objeto (lente divergente). El aumento lateral es:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-10/3}{-5} = \frac{10/3}{5} = \frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$y' = my = \frac{2}{3} \cdot 2 \text{ cm} = \frac{4}{3} \text{ cm} = 1,33 \text{ cm}.$$

El signo negativo en y' indica que la imagen es derecha (no invertida) respecto al objeto.

Por lo tanto, la imagen se forma a $-3,33$ cm de la lente, es virtual, derecha y de tamaño $1,33$ cm. La lente es divergente.

b) **Obtén razonadamente la posición de un objeto para que la imagen sea derecha y tenga un tamaño que sea la mitad que el del objeto. Justifica mediante un trazado de rayos la formación de la imagen.**

Queremos que el aumento lateral sea:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}.$$

Sabemos que:

$$m = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{s'}{s} \implies s' = \frac{s}{2}.$$

Usamos la ecuación de las lentes de nuevo:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

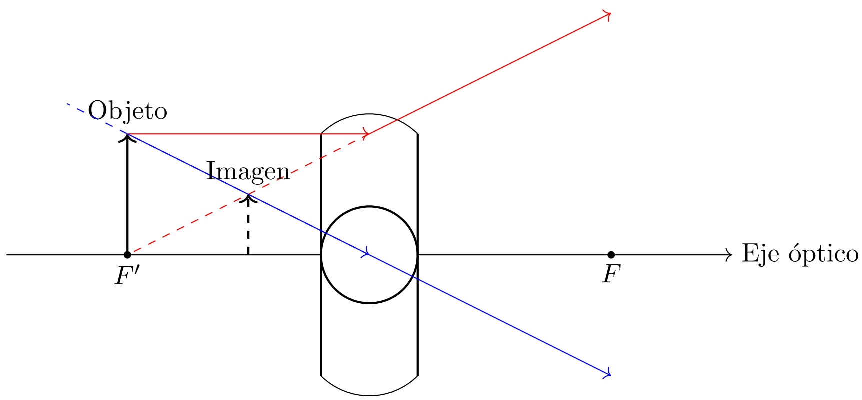
Sustituimos $s' = -\frac{s}{2}$ y $f' = -10$ cm:

$$\frac{1}{-10} = \frac{1}{s/2} - \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{10} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad s == f' = -10 \text{ cm}.$$

La imagen estará en:

$$s' = \frac{s}{2} = \frac{-10}{2} = -55 \text{ cm}.$$

El trazado de rayos es:



Por lo tanto, para obtener una imagen derecha y de tamaño la mitad que el objeto, este debe situarse a 10 cm a la izquierda de la lente divergente.

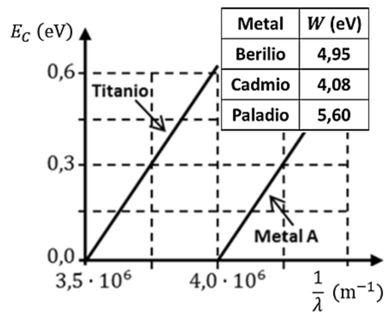
Problema 4. Física Moderna

En una experiencia se ilumina, con diferentes longitudes de onda, una placa que tiene dos zonas con metales distintos, titanio y un metal A desconocido. Se mide la energía cinética de los fotoelectrones emitidos obteniendo la gráfica adjunta.

a) **Calcula razonadamente la longitud de onda umbral para el metal A y su trabajo de extracción. Identifícalo a partir de los datos de la tabla adjunta.**

b) **Determina la velocidad de los electrones emitidos por el titanio cuando se ilumina con luz de frecuencia $1,13 \cdot 10^{15}$ Hz. ¿Qué sucede con los electrones del metal A si se ilumina con dicha luz?**

Datos: constante de Planck, $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s; carga eléctrica del electrón, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C; velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; masa del electrón, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg



Metal	W (eV)
Berilio	4,95
Cadmio	4,08
Paladio	5,60

Solución:

a) **Calcula razonadamente la longitud de onda umbral para el metal A y su trabajo de extracción. Identifícalo a partir de los datos de la tabla adjunta.**

Cuando los fotones de la radiación incidente poseen una energía igual al trabajo de extracción del metal, se tiene que la energía cinética de los electrones es cero. Entonces,

$$\frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = 4 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{máx}} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Ahora bien, sabemos que la expresión del trabajo de extracción es:

$$W_{\text{ext}} = h \cdot f_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_{\text{máx}}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^{-7}} = 7,92 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Convirtiendo a eV:

$$7,92 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 4,95 \text{ eV}.$$

Por lo tanto, elm metal A es el Berilio.

b) **Determina la velocidad de los electrones emitidos por el titanio cuando se ilumina con luz de frecuencia $1,13 \cdot 10^{15}$ Hz. ¿Qué sucede con los electrones del metal A si se ilumina con dicha luz?**

Primero, calculamos el trabajo de extracción del titanio.
De la gráfica, para el titanio:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{máx}} = \frac{1}{3,5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}} = 2,857 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

El trabajo de extracción del titanio es:

$$W_{\text{ext}} = hf_0 = h\frac{c}{\lambda_{\text{máx}}} = 6,6 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2,857 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 6,93 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Calculamos la energía del fotón incidente:

$$E_{\text{fotón}} = hf = 6,6 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot 1,13 \cdot 10^{15}\ \text{Hz} = 7,458 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

La energía cinética máxima de los electrones emitidos es:

$$E_c = E_{\text{fotón}} - W_{\text{ext}} = 7,458 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 6,93 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 0,528 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

La velocidad de los electrones se calcula mediante:

$$E_c = \frac{1}{2}m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}},$$

donde $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg es la masa del electrón. Sustituimos los valores:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,528 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 3,41 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

Ahora, para el metal A (Berilio), cuyo trabajo de extracción es $W_{\text{ext}} = 7,92 \cdot 10^{-19}$ J (calculado en el apartado a)). Comparando con la energía del fotón incidente:

$$E_{\text{fotón}} = 7,458 \cdot 10^{-19}\ \text{J} < W_{\text{ext}} = 7,92 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Como la energía del fotón es menor que el trabajo de extracción, no se emitirán electrones del metal A al iluminarlo con esta luz.

Por lo tanto, la velocidad de los electrones emitidos por el titanio es $\mathbf{3,41 \cdot 10^5}$ m/s, y en el metal *A* (Berilio) no se emiten electrones al iluminarlo con dicha luz.